第 42 卷 第 1 期
2025 年 2 月

应 用 力 学 学 报
Chinese Journal of Applied Mechanics

Vol. 42 No. 1
Feb. 2025

DOI:10.11776/j.issn.1000-4939.2025.01.012

基于改进可变容差法的结构可靠性分析方法

夏雨,汤峰,余颖烨,经承贵

(广西科技大学土木建筑工程学院,545006 柳州)

摘　要:HL-RF(Hasofer-Lind and Rackwitz-Fiessler)法在处理高非线性结构功能函数时会出现振荡、不收敛的问题。可变容差法能够有效解决上述问题,但该方法的反射点选取缺乏方向引导性。针对此,该论文提出基于权重分析改进反射基点的可变容差法。该方法先计算非最差点到标准正态空间原点的距离,并增大距离原点更近的点的权重,由此增强反射基点的方向引导性,促使迭代点能更快靠近失效点。通过数值算例验证,本研究提出的方法能够有效解决反射点缺乏方向引导性问题,并且在求解速度上具有显著优势。

关键词:可靠度;可变容差法;权重分析;距离;方向引导性

中图分类号:O213.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1000-4939(2025)01-0117-08

Reliability of flexible tolerance method based on weight analysis

XIA Yu,TANG Feng,YU Yingye,JING Chenggui

(School of Civil Engineering,Guangxi University of Science and Technology,545006 Liuzhou,China)

Abstract:The HL-RF(Hasofer-Lind and Rackwitz-Fiessler) method may cause oscillation and non-convergence when dealing with highly nonlinear structural function. The flexible tolerance method can solve the above problems effectively,but the selection of reflection points in this method is lack of direction guidance. For this reason,a flexible tolerance method based on weight analysis is proposed in this paper to improve the reflection base point. This method first calculates the distance from the non-worst squares to the origin of the standard normal space and increases the weight of the points closer to the origin. Thus,the direction guidance of the reflection base point is enhanced,and the iteration point can approach the failure point faster. Numerical examples show that the proposed method can effectively solve the problem of lack of direction guidance of reflection points,and has significant advantages in solving speed.

Key words:reliability;flexible tolerance method;weight analysis;distance;direction guidance

由于受到各种不确定性因素的影响,在实际工程中结构的实际参数往往会跟设计参数存在一定的偏差,而这些偏差会对结构的安全性与可靠性造成影响,所以如何对结构进行可靠性分析就显得尤为重要[1-4]。一次二阶矩法(first order reliability method,FORM)是目前应用最为广泛的可靠性分析方法,其

收稿日期:2022-07-30
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 51569005);广西自然科学基金资助项目(No. 2020GXNSFAA297203;2015GXNSFAA139279;2018GXNSFBA281186;2019GXNSFBA245071;桂科 AD19110068;桂科 AD19245125)
通信作者:夏雨,教授。E-mail:summ-rain@163.com
引用格式:夏雨,汤峰,余颖烨,等. 基于改进可变容差法的结构可靠性分析方法[J]. 应用力学学报,2025,42(1):117-124.
XIA Yu, TANG Feng, YU Yingye, et al. Reliability of flexible tolerance method based on weight analysis[J]. Chinese journal of applied mechanics,2025,42(1):117-124.

核心思想是把结构失效概率的计算问题转化为失效域内联合概率密度最大点的求解问题,该点也被称为最有可能失效点(most probable point,MPP),从几何意义上来讲,该点也是标准正态空间下极限状态面上距离原点最近的点,因此一次二阶矩法实质上是一种非线性约束优化问题[5]。

HL-RF(Hasofer-Lind and Rackwitz-Fiessler)法[6-7]是求解 MPP 最为常用的一种方法,但是该方法在求解高非线性函数时会出现迭代振荡甚至不收敛的情况。对此,贡金鑫[8]使用有限步长迭代法进行改进,提高了算法的收敛性,但是该方法在解决高非线性问题时仍然存在迂回振荡的问题。杨迪雄[9]利用混沌理论进行分析,提出了混沌控制(chaos control)法,该方法格式简单,易于实现,但计算效率相对较低;对此,孟增等[10]对混沌控制法的迭代方向进行了修正,提高了计算效率;而后李彬[11]又从多目标优化的角度研究了影响一次二阶矩方法收敛性的根本原因,建立了改进的自适应混沌控制算法,进一步提高了计算效率。肖宁聪等[12]提出了一种考虑权重、点间距以及点对极限状态函数贴合程度的选点方法,保证了响应面拟合过程中对点的需求。

随着对可靠度研究的深入,可变容差法的基础方法单纯形法也逐渐被众多专家学者所关注。孔锐睿等[13]针对单纯形法的反射方向进行了研究,并提出映射单纯形的新方法。改进后的单纯形法适应范围更广,收敛速度也有所加快。牛铭等[14]针对反射中心进行重新定位,使得经过改进后反射点的反射方向,更加靠近函数最优值方向,提高了搜索效率。以上算法均为针对单纯形法进行的改进,单纯形法是一种无约束条件的问题的求解方法,无法用于可靠度问题的求解。将单纯形法进行理论拓展可得可变容差法,该方法能够有效对可靠度求解这类有约束条件的问题进行准确求解。但可变容差方法也存在相应的问题,即反射基点缺乏方向引导性,导致计算速度较慢。

本研究基于可靠度指标 β 的几何意义与前面学者所作研究,提出了一种基于权重分析的可变容差法,通过对迭代过程中反射点选取策略的改进,以此提升该方法的计算速度。另外本研究就可变容差法的计算精度也进行了分析,并与 HL-RF 方法、CC 算法计算结果进行了对比,结果表明该方法与传统可变容差法相比,提高了计算效率与计算速度。

1 单纯形法基本原理

单纯形法[15](simplex method)是一种用于无约束条件下最优化问题的求解方法。该方法理论简单,在实际工程中应用场景比较广泛,但需要计算的功能函数值较多,因此并不适用于过多变量的情况。在 n 维空间中,由 $n+1$ 个不同的点组成的各边长度完全相同的多面体,称为正单纯形[16],如图 1 所示。x_h、x_p 和 x_l 组成的正三角形就是二维空间中的正单纯形,对比 3 个点的函数值可以得到 $g(x_h) > g(x_p) > g(x_l)$,由此可以确定最优点 x_l、次优点 x_p 以及最差点 x_h。单纯形法中存在 3 个计算过程,可以简要概括为反射、延伸以及收缩。

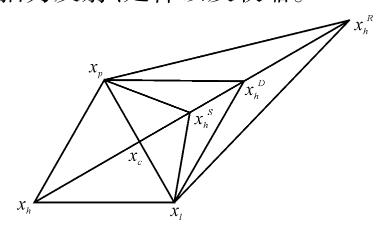


图 1 二维空间正单纯形原理

Fig. 1 Principle of two-dimensional space simplex

1)反射。取 x_l 与 x_p 的中点 x_c 与 x_h 连线,进行反射得到 x_h^D 为

$$x_h^D = x_c = \alpha(x_c - x_h) \tag{1}$$

如若 $g(x_h^D) < g(x_l)$,说明探索方向正确,进行延伸过程,反之则进行收缩过程。

2)延伸。反射过程的成功意味着所取的探索方向与步长正确,沿着该方向继续拓展探索步长,得到 x_h^R 为

$$x_h^R = x_c + \gamma(x_c - x_h) \tag{2}$$

3)收缩。反射过程的失败有可能是探索步长过长,考虑缩短探索步长,得到 x_h^S 为

$$x_h^S = x_c + \delta(x_c - x_h) \tag{3}$$

其中,α、γ、δ 分别取 1、2、0.5。单纯形法可以通过以上 3 个计算过程对无约束条件下的优化问题进行求解,而结构可靠度的求解计算则属于有约束条件的优化问题求解。由此对单纯形法理论进行拓展,以结构功能函数值作为选点依据,以到标准正态空间下原点的距离作为点的取舍指标,便可以推得可变容差法。

2 可变容差法基本原理

可变容差法[15](flexible tolerance method)由单

纯形法的理论基础拓展而来，该方法仍然需要通过各点的函数值来确定迭代方向，但是能够对有约束条件的优化问题进行有效求解，并且可以避免梯度类求解算法中因梯度方向错误而出现的迭代振荡、不收敛的情况。

与单纯形法计算过程类似，可变容差法的计算过程也分为反射、延伸以及收缩 3 个过程。不同的是，可变容差法在计算过程中需要遵循严格的取点依据，即取点要限制在近乎可行域与可行域范围内。

根据功能函数值的大小将整个标准正态空间划分为可行域、近乎可行域以及不可行域，如图 2 所示。可行域指的是极限状态面自身所占据的空间，此域内所有的点都坐落在极限状态面上，是能够用于准确计算可靠度指标的点，所以是可行点；近乎可行域指的是围绕在极限状态面周围一小部分空间，此域内的点基本坐落在极限状态面周边，其功能函数值很小，所以将其视为近乎可行点；而不可行域则指的是距离极限状态面有一定距离，其域内的点功能函数值较大，对于可靠度指标求解意义不大。

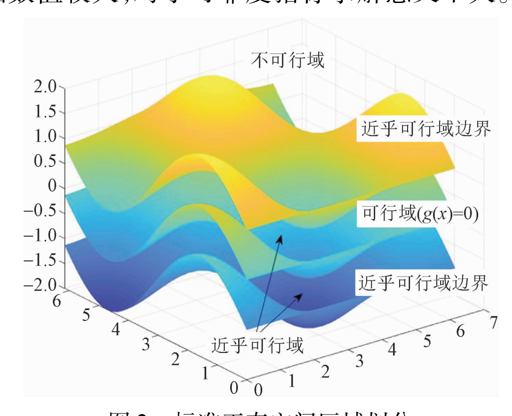


图 2　标准正态空间区域划分

Fig. 2　Regional division of standard normal space

根据结构可靠度的几何意义，可靠度指标 β 为标准正态空间下坐标原点 O 到极限状态面之间的最短距离，由此将结构可靠度指标转化为如下的数学模型。

$$\min \beta = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \right)^2 \right]^{1/2}, x \in u^n \quad (4)$$

$$\text{st.}\ \varphi^k - T(x) \geqslant 0 \quad (5)$$

$$T(x) = |g(x)| \quad (6)$$

其中，φ^k 表示的是容许误差准则，简称为容差准则，是单纯形顶点的函数，即 $\varphi^k = \varphi^k(x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k)$，在整个探索过程中 φ^k 不依赖于功能函数值，也不依赖于约束值，是一个递减的正函数，如式(7)所示，该准则也可以作为结束准则。满足该准则的就是可行点或近乎可行点，不满足该准则的就是不可行点，而不可行点在后续计算中需要通过其他计算方法进行极小化处理将其逼近至近乎可行域内，本研究中采用的是单纯形法的极小化处理方式。在可变容差法计算开始之前 φ^k 被赋予一个相对宽松的标准，随着后期计算步骤的增加与精度的提高，容差标准也逐步降低以缩小近乎可行域的范围，加强对点的约束。由于该容差准则的具体数值会随着计算的进行不断减少，因此该准则也被称为可变容差准则。

$$\varphi^k = \min\left\{ \varphi^{k-1}, \frac{m+1}{r+1} \| x_i^k - x_{\text{cent}}^k \| \right\} \quad (7)$$

$$\varphi^0 = 2(m+1)t \quad (8)$$

其中：m 为结构功能函数的个数；$r = n - m$ 代表目标函数在原问题中的自由度数；t 为容差准则的步长。下面构建初始单纯形并开始计算。

1）将 $g(x)$ 作为目标函数，选取初始点作为初始单纯形的一个顶点，并计算单纯形剩余顶点的坐标，汇聚成矩阵的形式，即

$$\begin{cases} x_2^1 = x_1^1 + (d_1, d_2, d_2, \cdots, d_2)^{\mathrm{T}} \\ x_3^1 = x_1^1 + (d_2, d_1, d_2, \cdots, d_2)^{\mathrm{T}} \\ x_4^1 = x_1^1 + (d_2, d_2, d_1, \cdots, d_2)^{\mathrm{T}} \\ \quad \vdots \\ x_{n+1}^1 = x_1^1 + (d_2, d_2, d_2, \cdots, d_1)^{\mathrm{T}} \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$d_1 = \frac{s}{n\sqrt{2}}(\sqrt{n+1} + n - 1) \quad (10)$$

$$d_2 = \frac{s}{n\sqrt{2}}(\sqrt{n+1} - 1) \quad (11)$$

其中，s 为初始单纯形的边长。

2）计算上述 $n+1$ 个单纯形顶点的函数值，通过式(7)计算容差准则，根据式(5)判断是否满足容差准则 φ^k，若不满足容差准则，进行极小化处理直至满足容差准则，选择极好点 x_l 与极差点 x_h，并根据式(2)计算反射基点。

3）反射过程。取 x_l 与 x_p 的中点 x_c 与 x_h 连线，进行反射得到 x_h^D，并计算函数值 $g(x_h^D)$，通过式(7)计算容差准则，根据式(5)判断其是否满足容差准则 φ^k 要求，若不满足要求则进行极小化处理后转至步骤 4)，若满足要求直接转至步骤 4)。

4）判断 $g(x_h^D)$ 的大小，若 $g(x_h^D) \leqslant g(x_l)$，则转至步骤 5)，若 $g(x_l) < g(x_h^D) < g(x_h)$，则由 x_h^D 代替 x_h，若 $g(x_h^D) \geqslant g(x_h)$ 则转至步骤 7)。

5)延伸过程。拓展探索步长得到 x_h^R,并计算函数值 $g(x_h^D)$,通过式(7)计算容差准则,根据式(5)判断其是否满足容差准则 φ^k 要求,若不满足要求则进行极小化处理后转至步骤6),若满足转至步骤6)。

6)若 $g(x_h^R) < g(x_h^D)$,则由 x_h^R 代替 x_h,否则由 x_h^D 代替 x_h。

7)收缩过程。缩短探索步长得到 x_h^S,并计算函数值 $g(x_h^D)$,判断其是否满足容差准则 φ^k 要求,若不满足要求则进行极小化处理后求得其函数值,若满足则直接求得其函数值,若 $g(x_h^S) < g(x_h)$,则由 x_h^S 代替 x_h,否则转至步骤8)。

8)若经过收缩之后的点仍无法满足计算要求,则说明该单纯形构型需要重新构建,除了最优点外的所有点都沿着本点到最优点的方向移动一半距离,即 $x_i = x_l + 0.5(x_i - x_l)$,转至步骤9)。

9)若容差准则 φ^k 小于最小容差准则 φ' 时,迭代停止,否则 $k = k+1$,转至步骤2)。

通过上述反射、延伸以及收缩步骤对单纯形顶点不断进行更新替换,最终使其收缩至很小的范围内,当单纯形的尺寸收缩到一定范围内也就是达到收敛准则之后,停止计算。

3 可变容差法的改进

可变容差法继承了单纯形法的优点,计算简便、无需求导,但是传统可变容差法计算过程中,因为基于反射、延伸、收缩的基点是除极差点外剩余点的中心点,并不能很好的起到一个方向导向作用,所以在计算过程中存在计算速度慢,步骤冗杂的情况,由此提出基于权重分析的可变容差法(flexible tolerance method weighted,FTMW)。

在对反射点的选取过程中使用权重分析的方法,对该点的选取方式进行了改进,使得选取的反射基点具有一定的方向导向作用。在对基点的权重分析中,主要考虑2个影响较大的因素,其一是剩余点到极限状态面的距离,其二则是剩余点到验算点的距离。根据这2个因素,假设新的基点的计算公式为

$$x_c = p_1\left[\frac{1}{n-1}(w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n)\right] + p_2\left[\frac{1}{n-1}(v_1x_1 + v_2x_2 + \cdots + v_nx_n)\right],\quad n \neq h \tag{12}$$

其中:p_1 与 p_2 分别代表2个权重,p_1 是点到极限状态面的权重,p_2 是点到最有可能失效点的权重,两个比重的和为1;w_i 与 v_i 代表的是不同权重下各点之间的权重配比。由于在可变容差法计算首步,单纯形各个顶点就进行了极小化处理,都满足容差准则,即各个顶点基本都处于极限状态面附近,如图3所示。

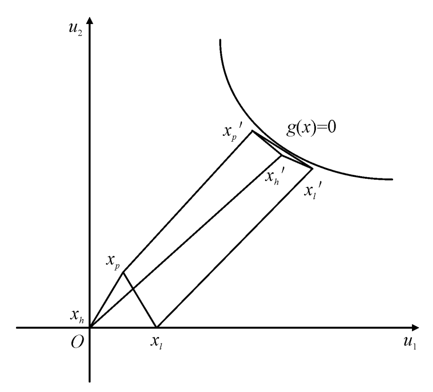


图3 可变容差法首次极小化后的单纯形顶点

Fig. 3 Simplex vertices after the first minimization by flexible tolerance method

该权重从本质上来讲是用于衡量点与极限状态面的距离,而可变容差法中的容差准则也能够保证所取点的位置不会在不可行区域内,因此只需要重点分析各点到验算点距离的权重即可。式(12)可以写为

$$x_c = \frac{1}{n-1}(v_1x_1 + v_2x_2 + \cdots + v_nx_n),\ n \neq h \tag{13}$$

由于MPP点在计算过程中属于未知点,因此通过分析单纯形各顶点到该点的距离难以实现。但是在容差准则强有力的约束下,单纯形各顶点是紧靠在极限状态面上的。根据结构可靠度的几何意义,可靠度指标 β 为标准正态空间下坐标原点 O 到极限状态面之间的最短距离,即各个顶点距离原点 O 的距离越小,也就代表着该顶点更靠近MPP点。那么该顶点便应当给予更高的权重,以使得经过 x_c 点反射、延伸之后的点能更靠近MPP点,如图4所示,由此可得 v_i 的权重计算方法为

$$v_i = \frac{\min \beta_i}{\beta_i} \tag{14}$$

根据式(12)与式(13)可以对传统可变容差法中 x_c 点的选取策略进行改进。改进后的可变容差法在选取新点代替最差点的过程中,x_c 点能实现更好的方向导向作用。

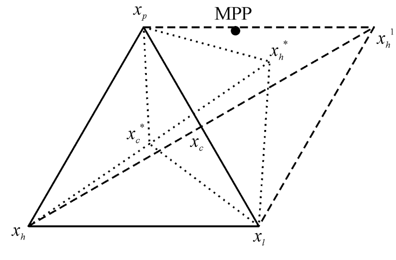


图 4　不同权重对 x_c 的影响

Fig. 4　The influence of x_c on different weights

4　算例分析

本研究算例中混沌控制算法的混沌控制因子取值为 0.1。文中各种计算方法采用均值点作为初始迭代点。由于本研究方法以及可变容差法开始计算时,以其中一个正单纯性的顶点为初始点,其他顶点属于算法中辅助计算的点,所以在此仅展示迭代初始点在可变容差法以及本研究方法下求解可靠度指标时的迭代路径。

4.1　算例 1:高非线性数值算例

假设功能函数形式为

$$g = x_1^3 + x_2^3 - 4$$

其中,随机变量相互独立,为 $x_1 \sim N(3.0,1.0)$ 和 $x_2 \sim N(2.9,1.0)$ 。

图 5 为不同计算方法求解可靠度指标时的迭代路径图。通过该图可以发现,该算例为一高非线性功能函数,HL-RF 算法出现迭代振荡不收敛的情况;CC 算法能够稳定收敛,但其迭代路径近乎一条直线,其迭代效率较低,通过 144 次才完成收敛计算;可变容差法由于缺乏方向引导性,在 2 种计算精度下的迭代次数分别为 87 次与 78 次,迭代效率较低,且迭代次数随计算精度的增加而增加;而本研究方法基于对反射点的修正,加强了其方向引导性,使得迭代次数大幅度降低,在 2 种精度下的计算迭代次数分别为 80 次与 39 次。证明改进之后的计算方法能够有效减少计算次数,加快计算速度。

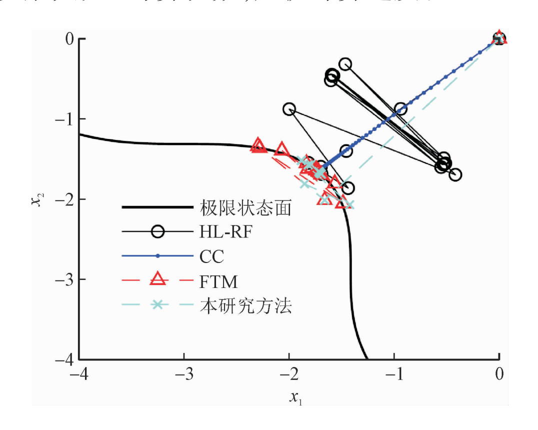


图 5　不同方法下算例 1 的 MPP 搜索路径

Fig. 5　MPP search path of Example 1 by different methods

表 1　算例 1 计算结果对比

Tab. 1　Calculation results based on different methods of Example 1

方法	迭代次数	验算点	可靠度指标	失效概率
HL-RF	振荡	–	–	–
CC	144	(−1.723 4, −1.650 6)	2.390 9	8.40×10^{-3}
FTM(10^{-4})	87	(−1.729 1, −1.651 2)	2.390 9	8.40×10^{-3}
FTM(10^{-3})	78	(−1.726 1, −1.654 2)	2.390 8	8.40×10^{-3}
本研究方法(10^{-4})	80	(−1.732 4, −1.647 9)	2.391 0	8.40×10^{-3}
本研究方法(10^{-3})	39	(−1.736 0, −1.644 1)	2.391 0	8.40×10^{-3}

4.2　算例 2:高非线性数值算例

假设功能函数为

$$g = x_1 - 1.7x_2 + 1.5(x_1 + 1.7x_2)^2 - 5$$

其中,随机变量相互独立,均服从标准正态分布,求解该算例的可靠度指标。

图 6 为不同计算方法求解可靠度指标时的迭代路径图。从该图中能够发现,该算例也是一高非线性功能函数,HL-RF 算法仍然振荡不收敛;CC 算法也开始出现振荡现象,最终无法正常收敛;而可变容差法仍可完成收敛计算,在 2 种不同计算精度下的迭代次数分别为 58 次与 41 次。

本研究方法基于权重分析对反射基点进行改进,改进后的方法在不同精度下的迭代次数分别为 39 次与 26 次,与传统的可变容差法相比,本研究方法提高了计算速度。

表2 算例2的计算结果对比

Tab. 2 Calculation results based on different methods of Example 2

方法	迭代次数	验算点	可靠度指标	失效概率
HL-RF	振荡	–	–	–
CC	69	(−2.367 3,1.509 4)	2.843 0	2.23×10^{-3}
FTM(10^{-4})	58	(−2.443 2,1.522 5)	2.878 7	2.00×10^{-3}
FTM(10^{-3})	41	(−2.440 8,1.525 4)	2.878 3	2.00×10^{-3}
本研究方法(10^{-4})	39	(−2.432 1,1.542 2)	2.879 9	1.99×10^{-3}
本研究方法(10^{-3})	26	(−2.431 4,1.542 8)	2.879 5	1.99×10^{-3}

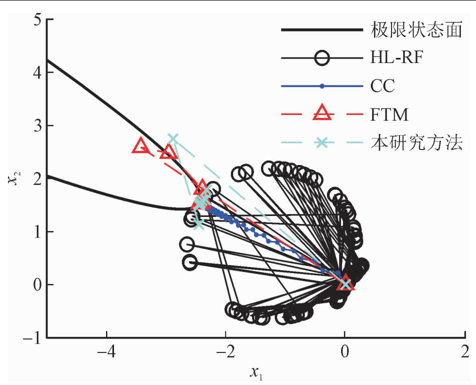


图6 不同方法下算例2的MPP搜索路径

Fig. 6 MPP search path of Example 2 by different methods

4.3 算例3:指数型功能函数

$$g = \exp[k(1 + x_1 - x_2)] + \exp[k(5 - 5x_1 - x_2)] - 1$$

其中:x_1、x_2均服从标准正态分布且相互独立;k为一参数,用来调节该功能函数的非线性程度,k的值越大,该功能函数的非线性程度越大。

如图7所示,计算该功能函数的可靠度指标,初始迭代点选择坐标原点。由于该算例的可靠度指标会随着参数k的变化而变化,所以该算例将直接给出不同参数下的计算结果。

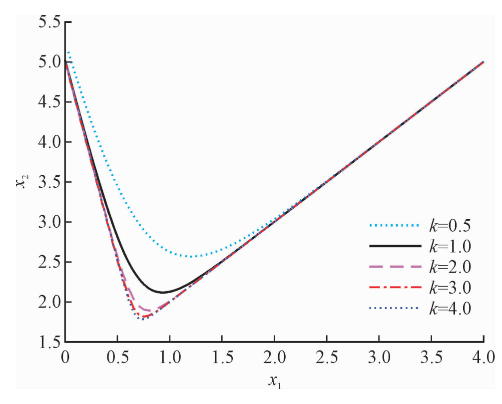


图7 不同k值下功能函数的非线性程度

Fig. 7 The nonlinear degree of the function under different k

图8为$k=0.5$时各种计算方法的迭代路径图。从图中可以发现,该功能函数为高非线性功能函数,HL-RF发生了振荡,没有完成收敛计算;CC算法的迭代路径近乎一条曲线,计算效率较低;传统可变容差法的初始迭代方法错误,导致算法出现较大的波动;本研究方法通过对非最差点外点计算相对应的权重,改进了反射基点,修正之后的计算方法稳定性得到加强,能够逐步稳定向着MPP收敛。

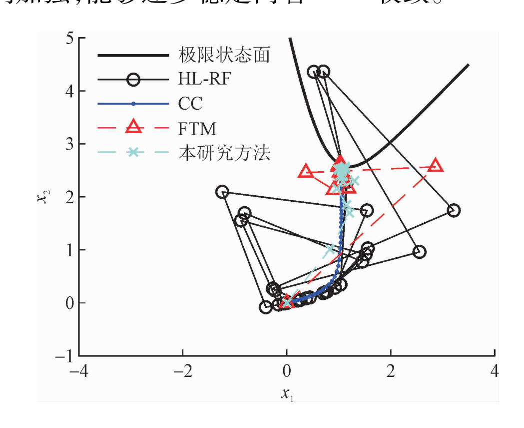


图8 $k=0.5$时的迭代点分布图

Fig. 8 Iterative distribution of checking points when $k=0.5$

图9为$k=5$时各种计算方法的迭代路径图。从图中可以看到,该功能函数随着k值的增大,非线性程度进一步增加,HL-RF无法完成收敛计算;CC算法也出现了提前收敛的情况,无法得到最终的可靠度指标;可变容差方法在计算初期,反射基点选取存在问题,导致首次迭代的偏差过大,后续经过迭代完成收敛,计算效率较低;本研究提出的计算方法在计算初期就将迅速、稳定地逼近MPP,减少了迭代次数,提升了计算速度。

在该部分共计算了6种不同参数下功能函数的可靠度指标,并将结果列在表3中。从该表中汇总的计算信息可以发现,本研究改进的计算方法能够准确求解可靠度指标,并且在迭代次数上要优于可变容差法。说明本研究中针对反射点的改进方案是

成功的,在计算后期能够起到正确的方向引导作用,改进后的算法提升了计算效率。随着功能函数非线性程度的增大,CC 算法开始出现提前收敛的情况,但本研究提出的计算方法仍能进行可靠度求解,证明了本研究方法在处理高非线性功能函数时的有效性。

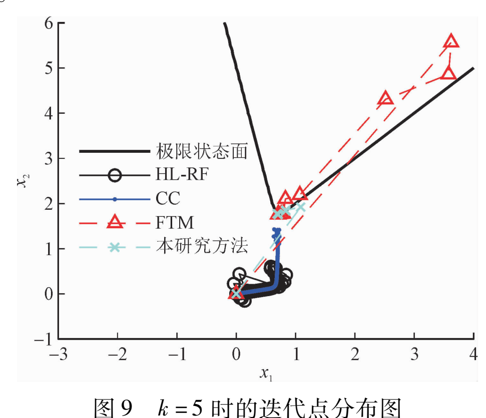


图 9　$k=5$ 时的迭代点分布图

Fig. 9　Iterative distribution of checking points when $k=5$

5　结　论

在面对高非线性功能函数时,传统的 HL-RF 方法已无法计算,CC 算法要进行大量的迭代计算才能得出结果,甚至有可能会提前收敛。这 2 种方法在面对高非线性函数时无法通过梯度信息有效选取迭代方向。可变容差方法存在反射基点缺乏方向引导性的问题。本研究方法从非梯度迭代理念的角度出发,改进了反射基点的选取策略,通过对最差点的反射、延伸、收缩,逐步选取合适点代替最差点,最终达到收敛。数值算例证明了本研究方法的合理性,计算结果表明本研究方法收敛更加稳定、迅速,是一种针对高非线性功能函数求解可靠度指标时值得考虑的方法。

表 3　不同参数下的计算结果

Tab. 3　Calculation results of different parameters

k	HL-RF			CC			可变容差法			本研究方法		
	迭代次数	$g(x^*)$	p_f/%	迭代次数	$g(x^*)$	p_f/%	迭代次数	$g(x^*)$	p_f/%	迭代次数	$g(x^*)$	p_f/%
0.5	振荡	–	–	89	1.33×10^{-3}	0.25	61	1.54×10^{-3}	0.25	46	1.18×10^{-3}	0.25
1.0	振荡	–	–	109	2.15×10^{-3}	1.07	43	1.42×10^{-3}	1.08	38	1.15×10^{-3}	1.08
2.0	振荡	–	–	153	3.97×10^{-3}	2.03	34	1.38×10^{-3}	2.03	34	1.38×10^{-3}	2.03
3.0	振荡	–	–	232	3.51	4.98	18	2.96×10^{-4}	2.47	18	6.99×10^{-4}	2.47
4.0	振荡	–	–	385	11.256	6.86	29	1.32×10^{-3}	2.74	23	5.58×10^{-4}	2.74
5.0	振荡	–	–	245	24.073	8.27	29	7.94×10^{-4}	2.90	23	5.77×10^{-4}	2.90

参考文献:

[1] DITLEVSEN O. Model uncertainty in structural reliability [J]. Structural safety, 1982, 1(1): 73-86.

[2] ZHENG J, LUO Z, JIANG C, et al. Non-probabilistic reliability-based topology optimization with multidimensional parallelepiped convex model [J]. Structural and multidisciplinary optimization, 2018, 57(6): 2205-2221.

[3] CABONI M, MINISCI E, RICCARDI A. Aerodynamic design optimization of wind turbine airfoils under aleatory and epistemic uncertainty [J]. Journal of physics: conference series, 2018, 1037(4): 042011.

[4] 刘敬敏,杨绿峰,余波. 考虑空间变异性的框架结构可靠度分析方法[J]. 计算力学学报,2020,37(6):677-684.
LIU Jingmin, YANG Lufeng, YU Bo. Reliability analysis method of frame structures considering spatial variability[J]. Chinese journal of computational mechanics, 2020, 37(6): 677-684 (in Chinese).

[5] 李彬,李刚. 基于 Armijo 准则的自适应稳定转换法[J]. 计算力学学报,2018,35(4):399-407.
LI Bin, LI Gang. Armijo-based adaptive stability transformation method[J]. Chinese journal of computational mechanics, 2018, 35(4): 399-407 (in Chinese).

[6] HASOFER A M, LIND N C. Exact and invariant second-moment code format [J]. Journal of the engineering mechanics division, 1974, 100(1): 111-121.

[7] RACKWITZ R, FLESSLER B. Structural reliability under combined random load sequences[J]. Computers & structures, 1978, 9(5): 489-494.

[8] 贡金鑫. 工程结构可靠度计算方法[M]. 大连:大连理工大学出版社,2003.

[9] 杨迪雄. 结构可靠度分析 FORM 迭代算法的混沌控制[J]. 力学学报,2007,39(5):647-654.

YANG Dixiong. Chaos control of form iterative algorithm in structural reliability analysis[J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics, 2007, 39(5): 647-654(in Chinese).

[10] 孟增,李刚. 基于修正混沌控制的一次二阶矩可靠度算法[J]. 工程力学,2015,32(12):21-26.
MENG Zeng, LI Gang. Modified chaos control-based first order second moment reliability method[J]. Engineering mechanics, 2015, 32(12): 21-26(in Chinese).

[11] 李彬. 基于多目标优化理论的高效可靠性分析方法研究[D]. 大连:大连理工大学,2019.

[12] 肖宁聪,袁凯,王永山. 基于序列代理模型的结构可靠性分析方法[J]. 电子科技大学学报,2019,48(1):156-160.
XIAO Ningcong, YUAN Kai, WANG Yongshan. Structural reliability analysis using sequential surrogate models[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2019, 48(1): 156-160(in Chinese).

[13] 孔锐睿,仇汝臣,周田惠. 单纯形的加速算法[J]. 南京理工大学学报,2003,27(2):209-213.
KONG Ruirui, QIU Ruchen, ZHOU Tianhui. An accelerated simplex method[J]. Journal of Nanjing University of Science and Technology, 2003, 27(2): 209-213(in Chinese).

[14] 牛铭,杨利文,陈昊. 一种改进的单纯形算法[J]. 河海大学常州分校学报,2007,21(1):15-18.
NIU Ming, YANG Liwen, CHEN Hao. An improved simplex method[J]. Journal of Hohai University Changzhou, 2007, 21(1): 15-18 (in Chinese).

[15] 刘惟信,孟嗣宗. 机械最优化设计[M]. 北京:清华大学出版社,1986.

[16] 夏雨,康哲民,龙嘉欣,等. 基于单纯形寻优的响应面可靠性分析方法[J]. 计算力学学报,2019,36(4):448-453.
XIA Yu, KANG Zhemin, LONG Jiaxin, et al. Reliability analysis method of response surface based on simplex optimization[J]. Chinese journal of computational mechanics, 2019, 36(4): 448-453 (in Chinese).

(编辑 李坤璐)

